



گزینه ۳

۱

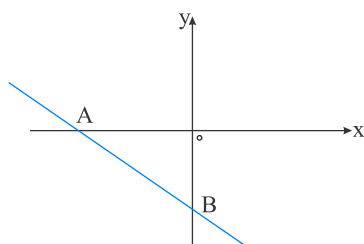
$f'(x)$ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{3}{5} \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x}} \right) - 3 \times \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{5} \times \frac{3x + 2x}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x - 2}{\sqrt[3]{x}}$$

x	۰	۲
f'	+	-

تابع f در فاصله $(0, 2)$ نزولی اکید است، پس حداکثر مقدار $b - a$ برابر با ۲ است.



خط فوق محوره‌ای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند.

A مختصات نقطه $(\frac{-m-3}{m}, 0)$

B مختصات نقطه $(0, -m-3)$

مساحت مثلث موردنظر عبارت است از:

$$S = \frac{-\frac{m-3}{m} \times (-m-3)}{2} \Rightarrow S = \frac{(m+3)^2}{2m}$$

$$S' = \frac{2(m+3) \times 2m - 2(m+3)^2}{4m^2} \Rightarrow S' = \frac{2(m+3)(2m-m-3)}{4m^2} = 0$$

$$S' = \frac{2(m+3)(m-3)}{4m^2} = 0 \Rightarrow m = \pm 3$$

به ازای $m = -3$ مثلی به وجود نمی‌آید، پس $m = 3$ قابل قبول است.

تابع f' را می‌نویسیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x - 5)(x + 1)$$

جدول تغییرات تابع f را رسم می‌کنیم:

		-1		5	
f'	+	○	-	○	+
f		↗	↘	↗	
		max	min		

نقاط اکسترمم تابع f به صورت زیر است:

نقطه $\min$: $(5, -95)$

نقطه $\max$: $(-1, 13)$

معادله خطوط مماس در این دو نقطه به صورت $y = -95$, $y = 13$ است که فاصله این دو خط از هم برابر است با:

$$|-95 - 13| = 108$$

برای یافتن نقاط بحرانی از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = (4x - 5)\sqrt[3]{x^2} + \frac{4x^2 - 10x}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{(12x^2 - 15x) + (4x^2 - 10x)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{16x^2 - 25x}{3\sqrt[3]{x}}$$

در $x = 0$ مشتق وجود ندارد (تعریف نشده است)، پس $x = 0$ یک نقطه بحرانی برای این تابع است. حال ریشه‌های $f'(x) = 0$ را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{16x^2 - 25x}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow x(16x - 25) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{25}{16} \end{cases}$$

بنابراین نقاط بحرانی این تابع $x = 0$, $x = \frac{25}{16}$ هستند که بزرگ‌ترین طول را $x = \frac{25}{16}$ در میان آن‌ها دارد؛ بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

راه اول: ابتدا نقاط بحرانی را می‌یابیم:

$$f(x) = 1 - (x - 3)^{\frac{2}{3}} \quad f'(x) = 0 - \frac{2}{3}(x - 3)^{-\frac{1}{3}}$$

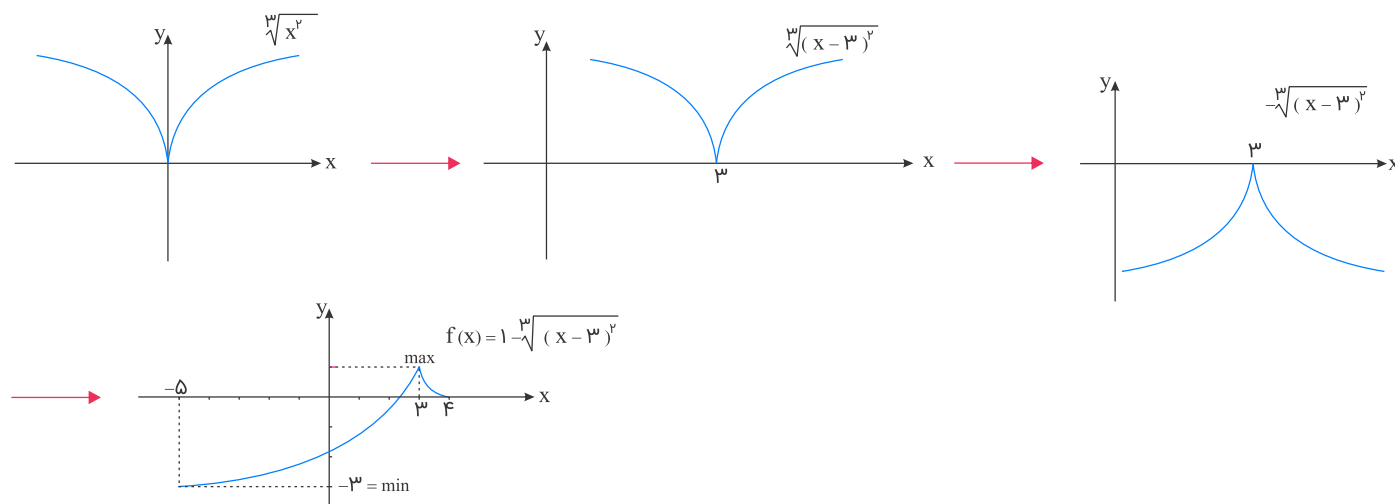
$$f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x-3}} \begin{cases} y' = 0 \Rightarrow -2 \neq 0 & \text{ریشه ندارد} \\ y' = \infty \Rightarrow x = 3 \in [-5, 4] \end{cases}$$

دقت کنید که نقاط ابتدا و انتهای بازه یعنی ۵- و ۴ هم بحرانی هستند.

	-۵	۳	۴
$f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-3)^2}$	-۳	۱	۰
	min	max	

$$y_{\max} - y_{\min} = 1 - (-3) = 4$$

راه دوم: می‌توان به کمک انتقال تابع را رسم کرد:



$$y_{\max} - y_{\min} = 1 - (-3) = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & ; |x| \geq 1 \\ \sqrt{1 - x^2} & ; |x| < 1 \end{cases}$$

$$D_f = \{x \mid |x^2 - 1| \geq 0\} = \mathbb{R}$$

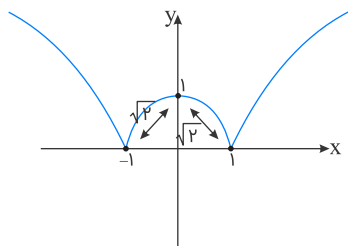
تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} & ; |x| > 1 \\ -x & ; |x| < 1 \end{cases}$$

تابع در نقاط $x = 1$ و $x = -1$ مشتق‌ناپذیر و همچنین $f'(0) = 0$ است. بنابراین طول نقاط بحرانی تابع f ، مجموعه $\{-1, 0, 1\}$ است. در این نقاط با جدول تعیین علامت f' داریم:

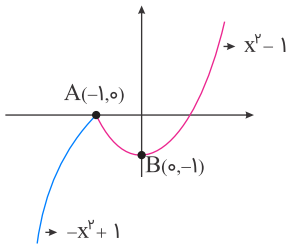
x	-1	0	1
f'	$-$	$+$	$-$
f	$\swarrow$	$\nearrow$	$\swarrow$
	min نسبی	max نسبی	min نسبی

بنابراین نقاط $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ مینیمم نسبی و نقطه $(0, 1)$ ماکزیمم نسبی است. فاصله دو اکسترمم متوالی در این تابع برابر $\sqrt{2}$ خواهد بود. نمودار تابع f به صورت زیر است:



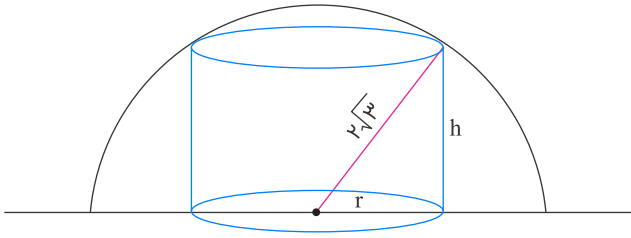
باید نمودار تابع را رسم کنیم:

$$f(x) = (x-1)|x+1| = \begin{cases} -(x-1)(x+1) = -x^2 + 1; & x \leq -1 \\ (x-1)(x+1) = x^2 - 1 & ; x > -1 \end{cases}$$



مطابق شکل ماکزیمم نسبی تابع در نقطه A و مینیمم نسبی آن در نقطه B رخ می‌دهد. فاصله این دو نقطه از هم را می‌خواهیم:

$$AB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$



$$\left. \begin{array}{l} V = \pi r^2 h \text{ استوانه} \\ r^2 + h^2 = 12 \Rightarrow r^2 = 12 - h^2 \quad (1) \end{array} \right\} \Rightarrow V = \pi(12h - h^3)$$

$$\Rightarrow V' = \pi(12 - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = 2 \xrightarrow{(1)} r = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2} r$$

باتوجه به نمودار دامنه تابع $[a, b]$ و به ازای آن برد تابع در یک بازه مثبت قرار دارد (یعنی بالای محور x ها است)، پس مقدار $f(x)$ همواره مثبت است. از طرفی تابع f صعودی اکید است، پس $f'(x) > 0$ است.

$$g(x) = \frac{-1}{f(x)} \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{(f(x))^2} \xrightarrow{f'>0, f>0} g'(x) > 0$$

$$h(x) = \sqrt[3]{f(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f(x)^2}} > 0$$

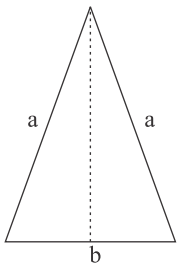
پس g و h هر دو صعودی اکیدند.

ابتدا $A + B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A + B = (3\sin^2\alpha + 4) + (3\cos^2\alpha + 2) = 9$$

چون $A + B = 9$ و مقداری ثابت است، پس حداکثر مقدار AB زمانی رخ می‌دهد که $A = B$ باشد. پس:

$$A = B = \frac{9}{2} \Rightarrow \max(AB) = \frac{9}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{81}{4} = 20.25$$



دو ساق برابر مثلث را a و قاعده را b در نظر می‌گیریم و داریم:

$$P = 2a + b = 3 \Rightarrow a = \frac{3-b}{2}$$

$$S = \frac{b}{2} \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b}{2} \sqrt{\left(\frac{3-b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$S = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{9-6b+b^2}{4} - \frac{b^2}{4}} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{9-6b}{4}} = \frac{b}{4} \sqrt{9-6b}$$

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{9b^2 - 6b^3}$$

$$S' = \frac{1}{4} \times \frac{18b - 18b^2}{2\sqrt{9b^2 - 6b^3}} = 0 \Rightarrow 18b(1-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=1 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$$P = 2a + b = 3 \xrightarrow{b=1} 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$a = b = 1$$

پس مثلث، متساوی‌الاضلاع است.

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \xrightarrow{a=1} S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

تابع هدف مسئله یعنی تابعی که قرار است کمترین مقدار آن به دست آید، عبارت است از:

$$P = x^2 + y^2$$

باتوجه به اینکه $x = 5 - 2y$ ، پس:

$$P = (5 - 2y)^2 + y^2 \Rightarrow P' = -4(5 - 2y) + 2y = 0$$

$$\Rightarrow -20 + 8y + 2y = 0 \Rightarrow y = 2, x = 1$$

بنابراین: $xy = 2$

تابع f' را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = -x^3 + ax^2 - 12x - 1 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2ax - 12$$

برای آنکه f نزولی اکید باشد، باید f' منفی باشد (البته می‌تواند در نقاطی که تشکیل بازه ندهند صفر هم بشود!).

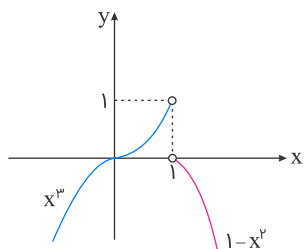
f' یک تابع درجه ۲ است. برای آنکه تابع درجه ۲، منفی باشد باید هر دو شرط زیر را داشته باشد:

$$1) \text{ (برقرار است) } x^2 < 0 \Rightarrow -3 < 0$$

$$2) \Delta \leq 0 \Rightarrow (2a)^2 - 4(-3)(-12) \leq 0 \Rightarrow a^2 - 36 \leq 0 \Rightarrow |a| \leq 6$$

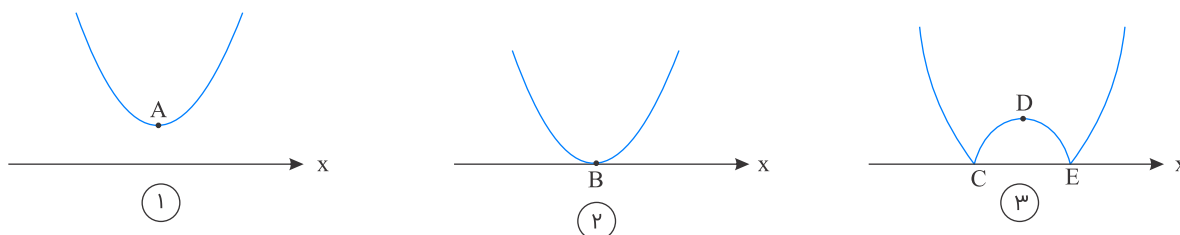
نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & ; x > 1 \\ a & ; x = 1 \\ x^3 & ; x < 1 \end{cases}$$



اگر $f(1) \geq 1$ باشد تابع در $x = 1$ ماکزیمم نسبی دارد و اگر $f(1) < 0$ باشد مینیمم نسبی خواهد داشت، پس در صورتی تابع در $x = 1$ اکسترمم نسبی ندارد که $0 \leq a < 1$ باشد.

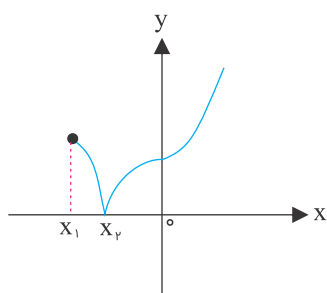
نمودار تابع $f(x) = |ax^2 + bx + c|$ به یکی از سه شکل زیر است:



در هر ۳ حالت نقطه رأس سهمی، بحرانی است؛ پس در تابع داده شده، $x = ۲$ حتماً بحرانی است. چون حاصل ضرب طول نقاط بحرانی ۶ شده، پس تابع باید بیش از یک نقطه بحرانی داشته باشد. در نتیجه فقط شکل (۳) می‌تواند جواب باشد. دو نقطه بحرانی دیگر هم ریشه‌های سهمی هستند که ضربشان می‌شود $p = \frac{c}{a} = c$ ، پس:

$$x_C \times x_D \times x_E = 6 \Rightarrow \underbrace{x_D}_2 \times \underbrace{(x_C x_E)}_c = 6 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

در نتیجه: $f(0) = |c| = 3$



اکسترمم نسبی: $\min = x_2$

اکسترمم مطلق: $\min = x_2$

نقاط بحرانی: x_1 (ابتدای بازه) و x_2 (مشتق‌پذیر نیست) و $x = 0$ (مشتق صفر است) هستند.

$$abc = 1 \times 1 \times 3 = 3$$

راه اول: نقطه‌ای روی $y = x^2$ به مختصات $A(\alpha, \alpha^2)$ در نظر گرفته و فاصله آن را از خط $-x + y + 1 = 0$ می‌یابیم. AB طول پل موردنظر است:

$$AB = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-\alpha + \alpha^2 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}}$$

مخرج کسر که ثابت است. برای مینیمم طول AB که همان طول پل است باید $|-\alpha + \alpha^2 + 1|$ حداقل شود که کافی است عبارت $y = -\alpha + \alpha^2 + 1$ را حداقل کنیم.

$$y' = -1 + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

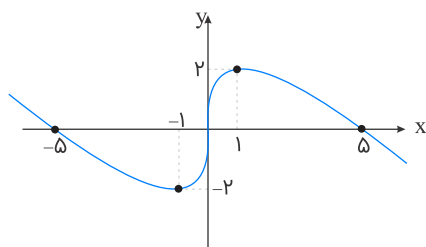
طول نقطه‌ای از سهمی $y = x^2$ که برای احداث پل ارتباطی بین ۲ تکه خشکی مناسب است.
راه دوم: کوتاه‌ترین فاصله یک منحنی از یک خط، جایی است که بتوان مماس موازی $y = x - 1$ کشید، یعنی $x = \frac{1}{2}$ و $y' = 2x = 1$.

نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

به علاوه $x = 0$ هم نقطه بحرانی تابع است، چراکه مخرج مشتق صفر می‌شود و مشتق در این نقطه موجود نیست. مشتق تابع در $x = \pm 1$ تغییر علامت می‌دهد، پس این نقاط اکسترمم‌های نسبی تابع هستند و تنها نقطه بحرانی که اکسترمم نسبی نیست در $x = 0$ رخ می‌دهد. به علاوه نمودار این تابع به شکل زیر است:

x	-1	0	1
f'	-	+	-
f	↘	↗	↘
	min		max



$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2+2x)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(2x+2)(x-1) - 2(x^2+2x)}{(x-1)^3} = \frac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - 2x^2 - 4x}{(x-1)^3} = \frac{-4x-2}{(x-1)^3} = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

مینیمم تابع در $x = -\frac{1}{4}$ رخ می‌دهد. مقدار آن را پیدا می‌کنیم:

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{1}{4} - 1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^2} < 0$$

پس چون طول و عرض این نقطه منفی است، مینیمم مطلق آن در ناحیه سوم دستگاه مختصات قرار می‌گیرد.

می‌خواهیم مشتق تابع $y = x + \sqrt{2x}$ اکیداً نزولی باشد؛ پس باید $y'' < 0$ را حل کنیم:

$$y = x + \sqrt{2x} \Rightarrow y' = 1 + \frac{1}{\sqrt{2x}} \Rightarrow y'' = \frac{-1}{2x\sqrt{2x}}$$

دامنه تابع y'' ، $x > 0$ است و به ازای تمامی مقادیر دامنه‌اش منفی است، پس به ازای $x > 0$ مشتق تابع y همواره نزولی خواهد بود.